

3. Das Bell-Kochen-Specker Theorem

Janine Handler

Eine Arbeit in Rahmen des Seminars
'Paradoxe der Quantenmechanik', Theoretische Physik,
Universität Wien

13. November 1998

Als ersters schauen wir uns den prinzipiellen Hintergrund der ursprünglichen Nicht-Versteckten-Variablen Argumentationen an, dann analysieren wir zwei modernere Bell-KS Variationen, wobei eins leicht in eine Bell-EPR Beweisführung transformiert werden kann. Dadurch wird die konzeptuelle Verbindung zwischen diesen beiden klarifiziert.

Inhalt

- I. Einleitung
- II. Bedingungen eines versteckten Variablen Theorems
- III. Kurzer geschichtlicher Hintergrund
- IV. Eine spektakuläre Vereinfachung des Bell-KS Theorems in 4 Dimensionen
- V. Ein Bell-KS Theorem in 8 Dimensionen
- VI. Grundannahmen eines versteckten Variablen Theorems
 - 1. Nicht-Kontextualität
 - 2. Lokalität
- VII. Das 8 dimensionale Bell-KS Theorem als Bell-EPR Theorem formuliert
- VIII. Aussage

I. Einleitung

Im Gegenteil zur klassischen Mechanik kann die Quantentheorie bestenfalls nur Wahrscheinlichkeiten von bestimmten Möglichkeiten vorhersagen, und die Transition von Möglichkeiten zu Fakten ist ein Mysterium. Die Meinung ist stark vertreten, daß allein der Akt der Messung den Zustand des Systems, also alle Möglichkeiten, auf ein Faktum kollabiert. Dies würde bedeuten, es gäbe keine versteckten Variablen. Das heißt, daß die Observable nicht einmal einen Augenblick vor der Messung den Wert der Messung ‚besitzt‘. Die Theorie der versteckten Variablen hat einen rein philosophischen Hintergrund um sie mit dem Weltbild der klassischen Physik in Einklang zu bringen und bedeutet *nicht* bessere Vorhersagungen. Dies ist für viele ein schwieriger philosophischer Standpunkt und man suchte eine Interpretation der Quantenphysik, wo die Wahrscheinlichkeiten den gleichen Status wie in der klassischen statistischen Physik haben. In diesem Sinne ist die Möglichkeit nur Wahrscheinlichkeiten vorraussagen zu können ein reiner Wissensmangel und die Messung enthüllt nur den Wert, den das System schon vorher hatte, nämlich die versteckte Variable. Die Schwierigkeit solch einer Behauptung liegt darin, daß dies schwer mit dem Formalismus der Quantenphysik vereinbar ist¹. Denken wir einmal an ein unabhängiges Teilchen, wie ein Elektron. Aus einer klassischen Perspektive hat es möglicherweise entweder die Position A oder B. Jedoch im quantenmechanischen Formalismus sind die Möglichkeiten der Position viel offener. Nicht nur kann das Elektron eins von den beiden oder eine andere Position haben, sonder auch auf A und B gleichzeitig sein. Schreiben wir $|A\rangle$ und $|B\rangle$ für den Zustand, wo das Elektron in Position A und B jeweils ist. Dann folgern wir aus der Quantentheorie², daß das Elektron auch in anderen Zuständen sein kann, nämlich

$$w|A\rangle + z|B\rangle$$

wobei die Gewichtungsfaktoren w und z komplexe Zahlen sind (mindestens eine von den beiden nicht Null). Wären w und z nicht-negative reelle Zahlen, dann könnten wir diese Kombination als einen Erwartungswert

¹ C.J. Isham *Lectures on Quantentheory*, Imperial College Press, 1995, S. 102

² Ab jetzt kürze ich Quantentheorie mit QT ab.

einer gewichteten Wahrscheinlichkeit sehen, wobei w und z jeweils die relativen Wahrscheinlichkeiten, daß das Elektron in A oder in B ist, representieren³. Dies ist aber nicht der Fall. Wie man sieht, ist es schwierig aus den Formalismus der QT heraus, die Idee anzunehmen, daß ein individuelles System, kurz vor der Messung, Werte für all ihre physikalischen Quantitäten ‚besitzt‘. Versteckten Variablen würden eine Weltanschauung, wo ein Teilchen mehrere Positionen hat oder wo man seine genaue Position und Impuls in einem Augenblick nicht genau definieren kann, verhindern. Ein celebrierter Polymathematiker sagte einmal, (Physiker) ... konvertieren, das was von ihnen nicht messbar ist, ins Nicht-Reale und ins Nicht-Existierende⁴. Um versteckte Variablen zu widerlegen, müssen durch ihre Annahme Resultate auftreten, die den Voraussagungen der QT widersprechen. Leider schweigt die QT über den inneren Prozess der in individuellen Systeme (z.B. ob ein Teilchen kurz vor der Messung an 2 verschiedenen Stellen gleichzeitig ist oder ob wir nur nicht wissen können, an welchen der beiden Stellen es in Wirklichkeit ist). Darum muß eine Nicht-Versteckten-Variablen-Theorie (auch genannt No-Go Theorem) irgendwelche Annahmen über diese präexistierenden Werte machen und kann die QT nur in spezifischen Fällen attackieren.

II. Bedingungen eines versteckten Variablen Theorems

Bevor wir annehmen, daß es versteckte Variablen gibt, schauen wir uns lieber noch eine Randbedingung an, die aus der standart QT erfolgt⁵. Nennen wir A, B, C, die Observablen von einer gegenseitig kommutierenden Menge. Ich erinnere nur daß,

$$\{A, B, C\} \text{ kommutieren gegenseitig} \Leftrightarrow \begin{cases} [A, B] = 0 \\ [B, C] = 0 \\ [A, C] = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Falls eine funktionale Relation

$$f(A, B, C, \dots) = 0 \quad (2)$$

existiert und weil das Resultat von simultanen Messungen von A, B, C, ... eine Menge von den simultanen Eigenwerten von A, B, C, ... sein wird, sagen wir a, b, c, ..., erfüllen die Resultate dieser Messungen auch

$$f(a, b, c, \dots) = 0 \quad (3)$$

egal in was für einem Zustand das System vor der Messung war.

Dies wissend, nennen wir die assoziierten Werte (oder versteckten Variablen) von den Observablen A, B, C, ... für ein individuelles System jeweils $w(A)$, $w(B)$, $w(C)$, ... Da sie die Werte sein sollen, die während der Messung ans Tageslicht kommen, muß der assoziierte Wert einer Observable, eines von seinen Eigenwerten sein. Aus (3) folgt

$$f(w(A), w(B), w(C), \dots) = 0 \quad (4)$$

III. Kurzer geschichtlicher Hintergrund

1932 proklamierte von Neumann einen Beweis, daß man keine versteckte Variablen konstruieren kann. Obwohl ein paar Jahre später Greta Herman anschauliche Mängel in der Argumentation aufweist, wird sie ignoriert. Von Neumanns Theorem gilt für 34 Jahre als unwiderruflich, bis John Bell, 1966, wiederentdeckte, daß die Argumentation auf eine Annahme basiert, die so deplaziert ist, daß es jedem sofort ins Auge stechen sollte.

Eine spezielle Folgerung aus Gleichung (2) und (3) ist: wenn A und B kommutieren und $C=A+B$, dann folgt $w(C)=w(A)+w(B)$. Von Neumanns ‚silly‘ Annahme, wie Bell es formiliert, liegt darin, daß er diese Bedingung annimmt, auch wenn A und B nicht kommutieren.

³ Dieses Beispiel verwendet Roger Penrose in *Shadows of the mind*, S.258 um zu zeigen, wie mathematisch genau daher deterministisch die QT eigentlich ist, solange keine Messung gemacht wird. Nur die Messung transformiert sie in eine Wahrscheinlichkeitstheorie.

⁴ Mermin zitierte dies im *Hidden variables and the two theorems of John Bell*, ND Mermin, Rev. Mod. Phys., Ausgabe 65, 1993, S. 803 von Adler, 1992, S.300

⁵ *Hidden variables and the two theorems of John Bell*, ND Mermin, Rev. Mod. Phys., Ausgabe 65, 1993, S. 803

Nachdem Bell von Neumanns Argumentation widerlegte, fand er gleich Beweise für 2 neue No-Go Theoreme. Eines davon entwickelten S. Kochen und E. P. Specker ein Jahr später unabhängig von einander⁶. Nennen wir es also Bell-KS Theorem. Das zweite No-Go Theorem gehört zur E. P. R.⁷ Klasse und nennen wir Bell-EPR Theorem. Wir werden uns später damit gründlicher befassen.

Vom Bell-KS Theorem erwähne ich nur die groben Züge von Bells ursprünglicher Argumentation, da es heute einfachere Argumentationen gibt, mit denen wir uns später im Detail befassen werden, allerdings mindestens 1 Dimension höher.

Wir haben einen 3 dimensional Phasen-Raum, ein Spin-1 Partikel und als Observablen das Quadrat der Spin-Komponenten. Da die Spin-Komponenten Eigenwerte +1, 0, -1 haben, sind die Eigenwerte der Observablen 0 und +1. Außerdem gilt für alle orthogonale $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$

$$(S_{\vec{u}})^2 + (S_{\vec{v}})^2 + (S_{\vec{w}})^2 = 2 \quad (5)$$

QT sagt uns auch, daß die quadratischen Spin-Komponenten von irgendwelchen 3 orthogonalen Richtungen eine gegenseitig kommutierende Menge formen. Daher können sie gleichzeitig gemessen werden und (5) sagt uns, daß 2 von ihnen den Wert 1 haben und der dritte den Wert Null. Um ein No-Go Theorem erzielen zu können, muß man einen Zustand finden, wo die Statistik von den Resultaten solcher simultanen Messungen (3 Spin-Komponenten in 3 orthogonalen Richtungen) nicht anhand einer Austeilung von 0 und 1 vollbracht werden kann. Die Aufgabe besteht also darin jeder Richtung, wo eine quadratische Spin-Komponente gemessen wird, eine 0 oder 1 zu assoziieren und einen Widerspruch mit der Randbedingung (5) zu erzielen. Bell vollbringt dies anhand der Lösung der folgenden geometrischen Aufgabestellung: Finde eine Menge von 3-dimensionalen Vektoren (das steht für die Richtung) mit der Eigenschaft, daß es unmöglich ist jeden Vektor rot oder blau (steht jeweils für den assoziierten Wert 1 oder 0 der quadratischen Spin-Komponenten in der, durch den Vektor beschriebenen, Richtung) anzumalen, so daß jede Untermenge von gegenseitig orthogonalen Vektoren nur einen blauen und zwei rote beinhaltet. Nach einer komplizierten geometrischen Analyse findet Bell den Widerspruch. Im Gegensatz zu Bell schreiben Kochen und Specker im Detail eine endliche Menge von Richtungen, die nicht im Rahmen der Bedingungen angemalt werden kann. Sie beinhaltet 117 Richtungen! Seit 1967 wurden andere Mengen von nicht-kolorierbaren Richtungen entdeckt mit weniger Vektoren. Die kleinste beinhaltet 31 Vektoren⁸

IV. Eine spektakuläre Vereinfachung des Bell-KS Theorems in 4 Dimensionen

Peres fand eine spektakuläre Vereinfachung des Bell-KS Theorems, allerdings eine Dimension höher, in 4 dimensionalen Phasen-Raum. Seine ursprüngliche Argumentation basiert zwar auf einen Singlet Anfangszustand von 2 Spin- $\frac{1}{2}$ Teilchens, wurde aber sehr einfach von Mermin so nachgezogen, daß man keinen speziellen Anfangszustand mehr braucht. Die Grundaufgabe bleibt immer die gleiche. Nämlich sich eine Menge von Observablen vorzustellen, für die bewiesen wird, daß es unmöglich ist, für jede Observable eine von

⁶ Aus mathematischer Sicht sind beide spezielle Fälle von einer viel stärkeren Analyse von A. M. Gleason, 1957

⁷ Einstein, Podolsky und Rosen hinterfragten die Vollständigkeit der Quantentheorie aufgrund von nicht-lokalen Erscheinungen. Dieses sogenannte EPR Paradoxon wurde 1935 im *Physikal Review* formuliert.

⁸ J. Conway und S. Kochen entdeckten sie, aber Asher Peres, 1991, fand eine Menge mit 33 Vektoren, die wegen ihrer 'Würfel-Symmetrie' viel schöner ist.

ihren Eigenwerten zu assoziieren, so daß alle funktionalen Relationen zwischen gegenseitigen kommutierenden Untermengen von Observablen auch von ihren assoziierten Werten gelten.

Betrachten wir 2 unabhängige Spin- $\frac{1}{2}$ Teilchen⁹. In einem 4 dimensionalen Phasen-Raum ist es einfacher ihre Observablen anhand von Pauli-Matrixen zu representieren. Die bekannten Eigenschaften eines-Spin- $\frac{1}{2}$ Teilchens sind:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{mit Eigenwerten}^{10} \pm 1$$

$$(\sigma_x)^2 = (\sigma_y)^2 = (\sigma_z)^2 = I_{2 \times 2}$$

$$\sigma_x \cdot \sigma_z = -\sigma_z \cdot \sigma_x = i \cdot \sigma_y$$

Notation:

x-Komponente von 'linken' Teilchen $\sigma_x^1 = \sigma_x \otimes I_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ¹¹

x-Komponente von 'rechten' Teilchen $\sigma_x^2 = I_{2 \times 2} \otimes \sigma_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Betrachten wir die Menge der 9 Observablen $\{\sigma_x^1, \sigma_x^2, \sigma_y^1, \sigma_y^2, \sigma_x^1 \cdot \sigma_y^2, \sigma_y^1 \cdot \sigma_x^2, \sigma_x^1 \cdot \sigma_x^2, \sigma_y^1 \cdot \sigma_y^2, \sigma_z^1 \cdot \sigma_z^2\}$

und die folgenden 6 Untermengen

$$M_1 = \{(\sigma_x^1 \cdot \sigma_x^2), (\sigma_x^1), (\sigma_x^2)\}$$

$$M_2 = \{(\sigma_y^1 \cdot \sigma_y^2), (\sigma_y^1), (\sigma_y^2)\}$$

$$M_3 = \{(\sigma_x^1 \cdot \sigma_y^2), (\sigma_x^1), (\sigma_y^2)\}$$

$$M_4 = \{(\sigma_y^1 \cdot \sigma_x^2), (\sigma_y^1), (\sigma_x^2)\}$$

$$M_5 = \{(\sigma_x^1 \cdot \sigma_y^2), (\sigma_y^1 \cdot \sigma_x^2), (\sigma_z^1 \cdot \sigma_z^2)\}$$

$$M_6 = \{(\sigma_x^1 \cdot \sigma_x^2), (\sigma_y^1 \cdot \sigma_y^2), (\sigma_z^1 \cdot \sigma_z^2)\}$$

Alle M_j , $j=1, 2, \dots, 6$, sind gegenseitig kommutierend. Dies ist direkt ersichtlich für die ersten 4. Trotzdem

zeige ich einen Kommutator für M_1 :

$$[(\sigma_x^1 \cdot \sigma_x^2), (\sigma_x^1)] = (\sigma_x^1 \cdot \sigma_x^2) \cdot (\sigma_x^1) - (\sigma_x^1) \cdot (\sigma_x^1 \cdot \sigma_x^2) = ((\sigma_x^1)^2 \otimes \sigma_x^2) - ((\sigma_x^1)^2 \otimes \sigma_x^2) = 0$$

⁹ man müßte gar nicht die 2 Spin-1/2 Teilchen erwähnen. Sie sind aber ein guter Anfangspunkt um auf allgemeinere 4-dimensionale Operatoren zu kommen.

¹⁰ Sei A eine NXN Matrix. Die Eigenwerte von A sind Zahlen λ_j , die erfüllen

$$A \cdot \vec{x} = \lambda_j \cdot \vec{x} \quad \text{für ein } \vec{x} \in \text{Vektorraum}$$

Es gibt maximal N verschiedene λ_j 's und $\vec{x}$ nennt man einen zu λ_j dazugehörigen Eigenvektor.

¹¹ Ich erinnere nur, $\otimes$ bedeutet Tensorprodukt. Das Tensorprodukt von 2 Vektorräumen V und W wird geschrieben $V \otimes W$. Hier verwenden wir oft die Eigenschaften

Wenn A und C auf V agieren, und B und D auf W agieren, dann folgt

$$(A \otimes B) \cdot (C \otimes D) = (A \cdot C) \otimes (B \cdot D) \text{ und } (A \otimes I) \cdot (I \otimes B) = (A \otimes B) \text{ mit } I, \text{ Identitätsoperator}$$

M_5 und M_6 sind jeweils auch gegenseitig kommutieren, da es in jedem Kommutator ein Paar von Antikommutation gibt.

Zum Beispiel ein Kommutator von M_5 :

$$\begin{aligned} &[(\sigma_y^1 \cdot \sigma_x^2), (\sigma_z^1 \cdot \sigma_z^2)] \\ &= (\sigma_y^1 \cdot \sigma_x^2) \cdot (\sigma_z^1 \cdot \sigma_z^2) - (\sigma_z^1 \cdot \sigma_z^2) \cdot (\sigma_y^1 \cdot \sigma_x^2) = (\sigma_y \cdot \sigma_z \otimes \sigma_x \cdot \sigma_z) - (\sigma_z \cdot \sigma_y \otimes \sigma_z \cdot \sigma_x) = 0 \end{aligned}$$

Zum Beispiel ein Kommutator von M_6 :

$$\begin{aligned} &[(\sigma_y^1 \cdot \sigma_y^2), (\sigma_z^1 \cdot \sigma_z^2)] \\ &= (\sigma_y^1 \cdot \sigma_y^2) \cdot (\sigma_z^1 \cdot \sigma_z^2) - (\sigma_z^1 \cdot \sigma_z^2) \cdot (\sigma_y^1 \cdot \sigma_y^2) = (\sigma_y \cdot \sigma_z \otimes \sigma_y \cdot \sigma_z) - (\sigma_z \cdot \sigma_y \otimes \sigma_z \cdot \sigma_y) = 0 \end{aligned}$$

Leichte Arithmetik zeigt uns

$$M_1 = (\sigma_x^1 \cdot \sigma_x^2) \cdot (\sigma_x^1) \cdot (\sigma_x^2) = I_{4 \times 4}$$

$$M_2 = (\sigma_y^1 \cdot \sigma_y^2) \cdot (\sigma_y^1) \cdot (\sigma_y^2) = I_{4 \times 4}$$

$$M_3 = (\sigma_x^1 \cdot \sigma_y^2) \cdot (\sigma_x^1) \cdot (\sigma_y^2) = I_{4 \times 4}$$

$$M_4 = (\sigma_y^1 \cdot \sigma_x^2) \cdot (\sigma_y^1) \cdot (\sigma_x^2) = I_{4 \times 4}$$

$$M_5 = (\sigma_x^1 \cdot \sigma_y^2) \cdot (\sigma_y^1 \cdot \sigma_x^2) \cdot (\sigma_z^1 \cdot \sigma_z^2) = I_{4 \times 4}$$

$$M_6 = (\sigma_x^1 \cdot \sigma_x^2) \cdot (\sigma_y^1 \cdot \sigma_y^2) \cdot (\sigma_z^1 \cdot \sigma_z^2) = -I_{4 \times 4}$$

Diese funktionalen Relationen beziehen sich also auf gegenseitig kommutierenden Untermengen. Es folgt aus der QT, daß dies die assoziierten Werte auch erfüllen müssen:

$$w(\sigma_x^1 \cdot \sigma_x^2) \cdot w(\sigma_x^1) \cdot w(\sigma_x^2) = 1$$

$$w(\sigma_y^1 \cdot \sigma_y^2) \cdot w(\sigma_y^1) \cdot w(\sigma_y^2) = 1$$

$$w(\sigma_x^1 \cdot \sigma_y^2) \cdot w(\sigma_x^1) \cdot w(\sigma_y^2) = 1 \quad (6)$$

$$w(\sigma_y^1 \cdot \sigma_x^2) \cdot w(\sigma_y^1) \cdot w(\sigma_x^2) = 1$$

$$w(\sigma_x^1 \cdot \sigma_y^2) \cdot w(\sigma_y^1 \cdot \sigma_x^2) \cdot w(\sigma_z^1 \cdot \sigma_z^2) = 1$$

$$w(\sigma_x^1 \cdot \sigma_x^2) \cdot w(\sigma_y^1 \cdot \sigma_y^2) \cdot w(\sigma_z^1 \cdot \sigma_z^2) = -1$$

Da die Eigenwerte von den 9 Operatoren alle +1 oder -1 sind und da jeder $w(A)$ ein Eigenwert von A sein muß, und da jeder Operator in den Gleichungen (6) auf der linken Seite doppelt vorkommt, muß das Produkt der linken Seite +1 ergeben. Das Produkt von der rechten Seite ist jedoch -1. Dieser Widerspruch zeigt uns, daß man den Observablen keine Werte assoziieren kann.

Wie man sieht ist dies ein viel einfacheres Bell-KS Theorem. Sie basieren beide auf den gleichen Grundprinzipien und sind dadurch auch beide der Selbst-Kritik Bells unterlegen.

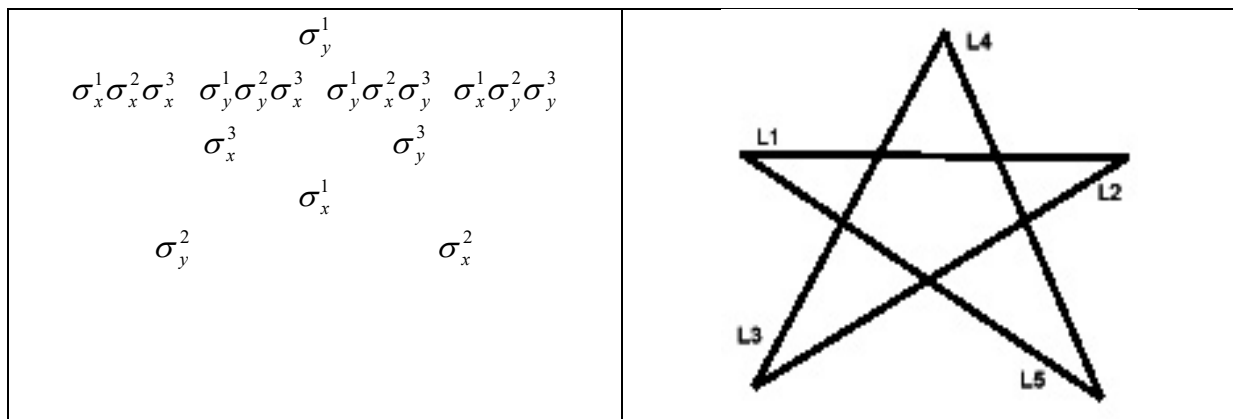
„Daß so viele Schlüsse von einer anscheinenden unschuldigen Behauptung gemacht werden können, führt uns ihre Unschuld zu hinterfragen.“

Aber bevor ich ins Detail gehe, schauen wir uns lieber noch die 8 dimensionale Version an, die noch einfacher ist, und vorallem eine Brücke zwischen Bell-KS Theorem und Bell-EPR Theorem ist. Das 8 dimensionale Bell-EPR Theorem wurde 1989 von Greenberger, Horne und Zeilinger¹² entdeckt und unter dem Gedankenanstoß von A. Stair von N. D. Mermin als Bell-KS Theorem angepaßt.

V. Ein Bell-KS Theorem in 8 Dimensionen

Betrachten wir 3-Spin $\frac{1}{2}$ Teilchen in einem 8 dimensionalen Phasen-Raum. Wieder verwenden wir die Pauli-Matrix-Repräsentation und die equivalente Notation. Diesmal geht es insgesamt um 10 Observablen. Um die Argumentation einfacher zu machen, fand Mermin eine schöne Konstellation dieser 10 Observablen. Sie sind in Vierer Gruppen auf 5 kreuzenden Linien (L1 bis L5) aufgeteilt, so daß sie einen 5-Punkte-Stern formen.

¹² ab jetzt kürze ich sie mit GHZ ab.



L1, L2, ... und L5 sind gegenseitig kommutierende Untermengen. Das ist für alle, außer der horizontalen Linie L1, direkt ersichtlich.

Zum Beispiel ein Kommutator von L2:

$$[\sigma_y^2, \sigma_x^1 \sigma_y^2 \sigma_y^3] = \sigma_x \otimes \sigma_y \sigma_y \otimes \sigma_y - \sigma_x \otimes \sigma_y \sigma_y \otimes \sigma_y = 0$$

L1 ist gegenseitig kommutierend, da es in jedem Kommutator ein Paar von Antikommuation gibt.

Zum Beispiel ein Kommutator von L1:

$$[\sigma_x^1 \sigma_x^2 \sigma_x^3, \sigma_y^1 \sigma_y^2 \sigma_x^3] = \sigma_x \sigma_y \otimes \sigma_x \sigma_y \otimes \sigma_x \sigma_x - \sigma_y \sigma_x \otimes \sigma_y \sigma_x \otimes \sigma_x \sigma_x = 0$$

Einfache Arithmetik zeigt:

$$L1 = -I_{8 \times 8}$$

$$L2 = I_{8 \times 8}$$

$$L3 = I_{8 \times 8}$$

$$L4 = I_{8 \times 8}$$

$$L5 = I_{8 \times 8}$$

Diese funktionalen Relationen beziehen sich also auf gegenseitig kommutierenden Untermengen. Es folgt aus der QT, daß dies die assoziierten Werte auch erfüllen müssen:

$$w(L1) = -1$$

$$w(L2) = 1$$

$$w(L3) = 1 \quad (7)$$

$$w(L4) = 1$$

$$w(L5) = 1$$

Da die Eigenwerte von den 10 Operatoren alle +1 oder -1 sind und da jeder $w(A)$ ein Eigenwert von A sein muß und da jeder Operator in den Gleichungen (7) auf der linken Seite doppelt vorkommt (jede Observable ist an der Kreuzung von 2 Linien), muß das Produkt der linken Seite +1 ergeben. Das Produkt von der rechten Seite ist jedoch -1. Dieser Widerspruch zeigt uns, daß man den Observablen keine Werte assoziieren kann.

VI. Grundannahmen eines versteckten Variablen Theorems

1. Nicht-Kontextualität

In allen Variationen des Bell-KS Theorems wurde etwas stillschweigend angenommen. Nämlich Nicht-Kontextualität. Was bedeutet das. Wir nahmen an, daß jede Observable einen assoziierten Wert besitzt, der mit dem zukünftigen Resultat der Messung im Einklang ist, *egal in welchem Kontext, nämlich 2 mögliche Untermengen von gegenseitig kommutierenden Observablen, die Messung vollbracht wurde.*¹³ Obwohl die 2 möglichen Untermengen miteinander nicht immer gegenseitig kommutieren. Diese Kritik gilt auch für das ursprüngliche Bell-KS Theorem. Und Bell selbst hat sie zum ersten Mal geäußert:

„Diese verschiedenen Möglichkeiten beanspruchen verschiedene experimentelle Aufbauten, es gibt keinen a prioris Grund zu glauben, daß die Resultate ... die gleichen seien sollten. Das Resultat einer Beobachtung könnte verständlicherweise nicht nur vom Zustand des Systems (inklusive versteckter Variablen) sondern auch von der vollständigen Disposition des Gerätes abhängen.“ (Bell, 1966).

¹³ Dies ist fast eine direkte Übersetzung von *Hidden variables and the two theorems of John Bell*, ND Mermin, Rev. Mod. Phys, Ausgabe 65, 1993, S. 803. Schon er unterstrich die Wichtigkeit dieses Satzes anhand des Formats.

Bell beschreibt die Annahmen der Nicht-Kontextualität genauso ‚silly‘, wie von Neumanns Annahme: A, B, C sind Observablen, und $A+B=C$, dann ist $w(A)+w(B)=w(C)$, auch wenn A und B *nicht* kommutieren. Bell begründet dies durch die Verschränktheit zwischen dem atomaren Objekt und dem Meßgerät:

Nicht-Kontextualität übersieht ‚die Unmöglichkeit eines klaren Unterschieds zwischen dem Verhalten atomarer Objekte und der Interaktion mit dem Meßgerät, welches für die Definition der Randbedingungen für das Erscheinen des Phänomens verwendet wird.‘

Trotzdem stimme ich mit Mermin überein, daß dies nicht so verrückt ist. Bevor ich ins Detail dieses Kommentares gehe, visualisieren wir uns noch, was Nicht-Kontextualität mathematisch bedeutet. Seien $\{A, B, C, \dots\}$ und $\{A, L, M, \dots\}$ jeweils gegenseitig kommutierende Mengen von Observablen. Die Annahme der Nicht-Kontextualität in einer versteckten Variablen Theorie, bedeutet, daß $w(A)$ (der assoziierte Wert von A) der gleiche ist, egal ob A im Endeffekt im Rahmen von $\{A, B, C, \dots\}$ oder $\{A, L, M, \dots\}$ gemessen wird. Auch wenn eine Observable aus $\{B, C, \dots\}$ nicht mit einer Observable aus $\{L, M, \dots\}$ kommutiert. Das erinnert uns an eine elementare Eigenschaft der QT. Seien $\{A, B, C, \dots\}$ und $\{A, L, M, \dots\}$ jeweils gegenseitig kommutierende Mengen von Observablen mit $\{a, b, c, \dots\}$ und $\{a, l, m, \dots\}$ dazugehörige simultanen Eigenwerten. Sowohl die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(a, b, c, \dots)$ als auch $p(a, l, m, \dots)$ ergeben die gleiche Einzelwahrscheinlichkeit $p(a)$. Die Einzelwahrscheinlichkeit scheint also auch nicht-kontextuell zu sein. Wenn man andererseits kontextuelle versteckte Variablen annehmen würde, wäre das genauso mysteriös und würde uns genauso wenig über die Hintergründe sagen, warum $p(a)$ gleich ist egal ob von $p(a, b, c, \dots)$ oder von $p(a, l, m, \dots)$. Solche Hinterfragungen gleichen dem Öffnen von Pandoras Box. Wieso ist das statistische Resultat der Messungen von gegenseitig kommutierenden Observablen, die in einer Reihenfolge durchgeführt werden, unabhängig von der Reihenfolge? In spezifischen Fällen kann man sogar alle gegenseitig kommutierenden Observablen mit einer Messung festlegen. Das statistische Resultat bleibt aber immer das gleiche.¹⁴

Es ist also verständlich, wenn man in einem No-Go Theorem die Annahme von Nicht-Kontextualität wiederfindet. Trotzdem gibt es noch eine andere Klasse von No-Go Theorems, wo Nicht-Kontextualität mit etwas viel Schwächeres ausgetauscht wurde.

2. Lokalität

Wiederholen wir lieber noch einmal

Seien $\{A, B, C, \dots\}$ und $\{A, L, M, \dots\}$ jeweils gegenseitig kommutierende Mengen von Observablen. Die Annahme der Nicht-Kontextualität in einer versteckten Variablen Theorie, bedeutet, daß $w(A)$ (der assoziierte Wert von A) der gleiche ist, egal ob A im Endeffekt im Rahmen von $\{A, B, C, \dots\}$ oder $\{A, L, M, \dots\}$ gemessen wird. Auch wenn eine Observable aus $\{B, C, \dots\}$ nicht mit einer Observable aus $\{L, M, \dots\}$ kommutiert. Stellen wir uns ein Meßgerät vor, das aus 3 von einander weit entfernten, unabhängigen Teilen, die jeweils A, B und C messen, besteht. Dies ist auch ein leicht umwandelbares Gerät, wo man die Teile, die B und C messen, mit Teilen, die L und M messen, wechseln kann ohne den Teil, das A mißt, zu stören. Nimmt man Lokalität (Sachen können sich nur lokal beeinflussen) an, dann gibt es auf Distanz keinen Einfluß und der Unterschied im Aufbau des Gerätes zwischen A gemessen im Rahmen von $\{A, B, C, \dots\}$ und zwischen A gemessen im Rahmen $\{A, L, M, \dots\}$ hat überhaupt keinen Einfluß auf die Messung von A. In diesem Fall kann man Nicht-Kontextualität mit Lokalität austauschen.

Schauen wir uns noch einmal die 8 dimensionale Version vom Bell-KS Theorem an:

3 Spin- $\frac{1}{2}$ Teilchen in einem 8 dimensionalen Möglichkeitsraum und die folgenden 10 Observablen mit jeweils Eigenwert +1 oder -1. Jede Linie entspricht einer gegenseitig kommutierenden Untermenge von Observablen. Es ist angebracht hier die σ_j 's als Spin - Komponenten anzusehen. Wir nehmen auch an, daß das Meßgerät so konstruiert ist, daß die 3 Teilchen so weit auseinander sind, daß ihre jeweiligen Spinmessungen keinen Einfluß auf die anderen hat.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \sigma_y^1 & & \\
 & & & & & & \\
 \sigma_x^1 \sigma_x^2 \sigma_x^3 & \sigma_y^1 \sigma_y^2 \sigma_x^3 & \sigma_y^1 \sigma_x^2 \sigma_y^3 & \sigma_x^1 \sigma_y^2 \sigma_y^3 & & & \\
 & \sigma_x^3 & & \sigma_y^3 & & & \\
 & & & & \sigma_x^1 & &
 \end{array}$$

¹⁴ Zum Beispiel könnte man 3 gegenseitig kommutierenden Observablen A, B, C mit Eigenwerten 0 oder 1 (wie die Komponenten des Spin zum Quadrat im originalen Bell-KS Beweis) anhand einer einzigen Messung, nämlich von der Observable $4A+2B+C$, determinieren.

$$\sigma_y^2$$

$$\sigma_x^2$$

Wie man sieht beschreiben alle Observablen in der Sternkonstellation, außer die in der horizontalen Linie, die Spin-Komponenten von einzelnen isolierten Teilchens. Diese 6 Observablen werden weit entfernt von einander gemessen und die Annahme, daß der assoziierte Wert von einer nicht von den anderen abhängt, kann durch etwas viel Schwächeres als Nicht-Kontextualität begründet werden, nämlich durch Lokalität. Jetzt bleibt nur noch die horizontale Linie übrig, die aus 4 Observablen besteht, die jeweils eine Spin-Komponente von allen 3 Teilchens beinhalten und daher nicht-lokal sind. Bis jetzt mußten wir noch gar nichts über den Zustand des Systems behaupten. In der Bell-KS Version war es nicht von Nöten, aber der Austausch von einer starken Annahme (Nicht-Kontextualität) gegen eine schwache Annahme (Lokalität) gleicht einem Informationsverlust, das durch einen Informationszuschuß aufgehoben werden kann, um zu einen Widerspruch mit der QT zu gelangen.

Diesen Punkt werden wir nach der Argumentation noch einmal genauer betrachten. Nennen wir Φ den simultanen Eigenzustand von den folgenden gegenseitig kommutierenden Observablen $\sigma_y^1 \sigma_y^2 \sigma_x^3$, $\sigma_y^1 \sigma_x^2 \sigma_y^3$

und $\sigma_x^1 \sigma_y^2 \sigma_y^3$, wobei alle 3 Eigenwert +1 haben¹⁵. Leichte Arithmetik zeigt uns

$$\sigma_x^1 \sigma_x^2 \sigma_x^3 = -(\sigma_y^1 \sigma_y^2 \sigma_x^3)(\sigma_y^1 \sigma_x^2 \sigma_y^3)(\sigma_x^1 \sigma_y^2 \sigma_y^3).$$

Daher ist Φ auch ein Eigenzustand von der Observable $\sigma_x^1 \sigma_x^2 \sigma_x^3$ mit dem Eigenwert -1.

$$\sigma_x^1 \sigma_x^2 \sigma_x^3 = -(\sigma_y^1 \sigma_y^2 \sigma_x^3)(\sigma_y^1 \sigma_x^2 \sigma_y^3)(\sigma_x^1 \sigma_y^2 \sigma_y^3) = -1$$

$$\sigma_y^1 \sigma_y^2 \sigma_x^3 = 1 \quad (8)$$

$$\sigma_y^1 \sigma_x^2 \sigma_y^3 = 1$$

$$\sigma_x^1 \sigma_y^2 \sigma_y^3 = 1$$

Aus (8) folgt, daß man die Messung der x-Komponente des Spins m_x für jedes Teilchen vorraussagen kann, wenn man zuvor von den anderen 2 Teilchen jeweils die y-Komponenten gemessen hat. Genauso kann man für jedes Teilchen die y-Komponente m_y vorraussagen, wenn man zuvor von den anderen 2 Teilchen jeweils die x – und die y-Komponente gemessen hat. Um Einstein's 'spukhafte Fernwirkungen' zu umgehen, muß man annehmen, daß die Teilchen schon vor der Messung die Werte 'besaßen'. Zum Beispiel, daß jedes System im Zustand Φ durch Nummer m_x^1 , m_y^1 , m_x^2 , m_y^2 , m_x^3 , m_y^3 charakterisiert ist, die das Meßresultat einer beliebigen Observable aus $\{(\sigma_x^1 \sigma_x^2 \sigma_x^3), (\sigma_y^1 \sigma_y^2 \sigma_x^3), (\sigma_y^1 \sigma_x^2 \sigma_y^3), (\sigma_x^1 \sigma_y^2 \sigma_y^3)\}$ bestimmt. Die Ähnlichkeit der m_j^i mit $w(\sigma_j^i)$ ist nicht zu übersehen.

Da Φ ein simultaner Eigenzustand von $(\sigma_x^1 \sigma_x^2 \sigma_x^3), (\sigma_y^1 \sigma_y^2 \sigma_x^3), (\sigma_y^1 \sigma_x^2 \sigma_y^3), (\sigma_x^1 \sigma_y^2 \sigma_y^3)$ ist mit den jeweiligen Eigenwerten -1, 1, 1, 1 folgt

$$m_x^1 m_x^2 m_x^3 = -1$$

$$m_y^1 m_y^2 m_x^3 = 1 \quad (9)$$

$$m_y^1 m_x^2 m_y^3 = 1$$

$$m_x^1 m_y^2 m_y^3 = 1$$

Ähnlich wie in der Bell-KS Argumentation ist (9) unmöglich, da die linke Seite +1 ist (jedes m_j^i kommt doppelt vor) und die rechte Seite -1.

Diese Bell-EPR Argumentation (basiert auf Lokalität) ist stärker als ihre Bell-KS Argumentation (basiert auf Nicht-Kontextualität): die KS Form widerspricht jeglichem Versuch, irgendeiner Observable einen Wert zuzuordnen. Die EPR Form andererseits widerspricht jeglichem Versuch den Observablen einen Wert zuzuordnen, die Einstein's Lokalität erfüllen müssen. Den Preis den die EPR Argumentation für ihre Stärke zahlen muß, ist das sie die Eigenschaft eines speziellen Zustandes braucht und sich daher auf eine speziellere Klasse von Observablen als in der KS Argumentation bezieht. Bell's originale EPR Argumentation wird durch GHZ Version gestärkt und ich stimme mit N. D. Mermin überein, daß die Anpassung des GHZ als eine KS Argumentation in die Textbücher der Fundamente der QT hineingehört. Sie würde vielen Studenten unnötige

¹⁵ Es gibt 2^3 mögliche Eigenzustände. Ein Hinweis warum die Bell-EPR Argumentation von Greenberger, Horne und Zeilinger in ein Bell-KS angepaßt werden kann, ist, daß die Bell-EPR Argumentation für alle 8 Eigenzustände funktioniert.

Mühen mit der geometrischen Argumentationen der originalen KS Version ersparen (außer man interessiert sich insbesondere für 3 Dimensionen).

Es ist interessant zu sehen warum man die 4 dimensionale KS Argumentation nicht in eine EPR Argumentation anpassen kann. Es gibt 4 lokale Observablen $\sigma_x^1, \sigma_x^2, \sigma_y^1, \sigma_y^2$. Aber das Problem liegt bei den 5 nicht-

lokalen Observablen $\sigma_x^1 \cdot \sigma_y^2, \sigma_y^1 \cdot \sigma_x^2, \sigma_x^1 \cdot \sigma_x^2, \sigma_y^1 \cdot \sigma_y^2, \sigma_z^1 \cdot \sigma_z^2$. Nicht-Kontextualität kann man

natürlich nicht verwenden um den Widerspruch zu erzielen und im Gegensatz zur GHZ EPR Version sind nicht alle nicht-lokalen Observablen gegenseitig kommutierend und haben daher keinen simultanen Eigenzustand.

Die Argumentation, die in der GHZ EPR Version verwendet wird, um den nicht-lokalen Observablen Werte zu assoziieren, funktioniert also in der 4 dimensional KS Form nicht.

VIII. Aussage

Seit der ursprünglichen Formulierung des EPR Paradoxon ‚Kann man den Wert einer physikalischen Größe mit Sicherheit (das heißt Wahrscheinlichkeit 1) vorhersagen, ohne ein System dabei in irgendeiner Weise zu stören, dann gibt es ein Element der physikalischen Wirklichkeit, das dieser physikalischen Größe entspricht.‘ gab es viele Versuche diese Aussage zu verifizieren. Erinnern wir uns an das 8 dimensionale GHZ Bell-EPR Theorem. Man kann die x-Komponente mit Sicherheit vorhersagen, wenn man zuvor jeweils die x-Komponenten von den anderen 2 Teilchens gemessen hat. Ganz im Sinne Einsteins nahmen wir an das es keine spukhaften Fernwirkungen gibt, das heißt, daß die Messung einer Spin-Komponente eines Teilchens von jeglicher Messung an den anderen 2 Teilchens ungestört bleibt. Trotzdem widerspricht die Beweisführung jeglichem Versuch genau den Observablen einen Wert zuzuordnen, die Einstein’s Lokalität erfüllen müssen. Anscheinend ist die ursprünglichen Aussage des EPR Paradoxon widerlegt. Falsch. Den das GHZ Bell-EPR Theorem bezieht sich (nur) auf einen spezifischen Fall, und wie ich schon in der Einleitung erwähnt habe, kann man aus den reinen Formalismus der QT kein No-Go Theorem erzielen (jedenfalls bis jetzt nicht). Die einzigen allgemeinen Aussagen, die wir jeweils vom Bell-KS und vom Bell-EPR Theorem machen können sind:

Bell-KS Theorem: In einer versteckten Variablen Theorie hängen die assoziierten Werte, sogar von gegenseitig kommutierenden Observablen, von der Art und Weise, wie sie gemessen werden, ab.

Bell-EPR Theorem: In einer versteckten Variablen Theorie hängt ein assoziierter Wert von einer Observable vom ganzen experimentellen Aufbau, unter dem er gemessen wird, ab. Die kleinste Störung, auch wenn sie sehr weit vom Ort der Messung stattfindet, hat einen nicht zu unterschätzenden Einfluß.

Beide Theoreme sind ja eigentlich nur Versuche Einsteins Lokalität (oder seine stärkere Form Nicht-Kontextualität) mit den Formalismus der QT zu vereinbaren. Aber sie erreichen eigentlich mehr oder weniger das Gegenteil¹⁶. Auch heute gelten die Worte, die Dirac 1972 über die Quantentheorie schrieb: ‚Die Nicht-Lokalität ist gegen den Geist der Relativitätstheorie, aber sie ist das Beste, was wir derzeit haben ... sicherlich ist man nicht mit einer derartigen Theorie zufrieden. So erscheint mir das Problem der Verträglichkeit von Quantentheorie und Relativitätstheorie auch heute ungelöst.‘

Bibliographie

N. D. Mermin, *Hidden variables and the two theorems of John Bell*, Rev. Mod. Phys, Ausgabe 65, 1993, S. 803

N. D. Mermin, *Simple Unified Form for the Major No-Hidden Variables Theorems*, Phys. Rev., vol.65, number 27, 1990

N. D. Mermin, *Quantum mysteries revisited*, Am. J. Phys. 58, 731-734, 1990d

N. D. Mermin, *What’s wrong with these elements of reality?*, Phys. Today 43(6), 9, 1990c

M. Readhead, *Incompleteness, Nonlocality and Realism*, Clarendon Press Oxford, 1987

A. Peres, *Two simple proofs of the Kochen-Specker theorem*, J. Phys. A 24, L175-L178, 1991

A. Peres, *Incompatible results of quantum measurements*, Phys. Lett., A 151, 107-108, 1990

F. Selleri, *Die Debatte um die Quantentheorie*, Vieweg und Sohn Verlag, 1984

C.J. Isham, *Lectures on Quantumtheory*, Imperial College Press, 1995

R. Penrose, *Shadows of the mind*, Oxford University Press, 1994

¹⁶ Viele Leute meinen, daß das Bell-EPR Theorem Nicht-Lokalität beweist, aber es gibt keine allgemeine Zustimmung.